

1

以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $3x + 11y = 1$ の整数解の1つを求めよ。
- (2) 方程式 $3x + 11y = 1000$ の整数解をすべて求めよ。
- (3) 自然数 x, y が (2) の方程式を満たすとする。 $|x - y|$ の最大値と、そのときの x, y の値を求めよ。

2

xyz 空間における4点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。ただし、 n は2以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ を平面 $x = k$ で切ったとき、断面として現れる三角形 T_k のすべての頂点の座標を求めよ。ただし、 k は整数で $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (2) (1) の三角形 T_k の内部に含まれ、 y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n, k を用いて表せ。ただし、辺および頂点は内部に含まれないとする。
- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれ、 x, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n を用いて表せ。ただし、面、辺、および頂点は内部に含まれないとする。

3

xy 平面上に点 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ と、円 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上を動く点 $P(a, b)$ があるとする。各点 P に対して、線分 AP の垂直二等分線を l_p とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l_p の方程式を求めよ。
- (2) 直線 OP と l_p が平行であるとき、 P の座標を求めよ。
- (3) 直線 OP と l_p が交点をもつとき、交点 Q の軌跡の方程式を求め、さらにその軌跡を図示せよ。

4

下の図のように、三角形 ABC の外側で頂点または辺上の点からの距離が1以内にある、長方形および扇形からなる領域を Z とする。さらに、 $AB = AC = 3$ とし、 $\angle ABC = \theta$ とおく。また、 Z の面積を S_1 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) S_1 を求めよ。
- (2) 三角形 ABC の内接円の半径 $r(\theta)$ を求めよ。
- (3) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、(2) の $r(\theta)$ の最大値を求めよ。
- (4) (2) の内接円の面積を S_2 とする。 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 $S_1 > S_2$ を示せ。

