2026 岡山大学　前期日程　数学（理系）　120 分

1

$t$ を$0 < t < 1$ を満たす実数とする。三角形$OAB$ において、辺$OA$ の中点を$C$、辺$OB$ を$t:(1-t)$ に内分する点を$D$ とし、線分$BC$ と線分$AD$ の交点を$P$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。$\overrightarrow{OP}$ を$\vec{a}$ と$\vec{b}$ と$t$ を用いて表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{OB}\right| = 2,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}$ とする。$\left|\overrightarrow{OP}\right| \leqq 1$ を満たす$t$ の値の範囲を求めよ。

2

座標平面上を繰り返し運動する点$P$ について考える。点$P$ は、はじめに原点 $O(0,0)$ にあるとする。点$P$ は1回の運動で以下の確率に従って「移動する」または「移動しない」ものとする。

点$P$ が座標 $(x,y)$ の位置にあるとき、

(a) 移動しない確率は $\frac{4}{9}$

(b) $(x+1,y),(x-1,y),(x,y+1),(x,y-1)$ に移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{9}$

(c) $(x+1,y+1),(x-1,y+1),(x+1,y-1),(x-1,y-1)$　に移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{36}$

この運動を繰り返す。正の整数$n$ に対して、$n$ 回運動後の点$P$ の座標を $(x_n,y_n)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $|x_1| = 1$ かつ $|y_1| = 1$ となる確率を求めよ。

(2) $|x_n| = n$ かつ $|y_n| = n$ となる確率を求めよ。

(3) $x_n = n$ となる確率を求めよ。

(4) $|x_n| = n$ または $|y_n| = n$ となる確率を求めよ。

3

$i$ は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha,\beta$ を実数とする。$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ を示せ。

(2) $\theta$ を実数とする。正の整数$n$ に対して、$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ を示せ。

(3) 以下の条件$(a),(b)$ をともに満たす複素数$z$ をすべて求めよ。

$(a)$ $z$ の虚部は正で$|z| = 1$ である。

$(b)$ $z^5 + z$は実数である。

4

$a$ を実数とし、$a \geqq 1$ を満たすとする。また

$$f(x) = |a-x|e^x$$
$$g(x) = |a+x|e^{-x}$$

とする。さらに曲線$C,D$ を以下のように定める。

$$C: y = f(x)$$
$$D: y = g(x)$$

以下の問いに答えよ。ただし、必要ならば自然対数の底$e$ が$e > 2$ を満たすことを用いてもよい。

(1) $f(a) < g(a)$ および$f(2a) > g(2a)$ を示せ。

(2) $a > 1$ のとき、$0 < x < a-1$ ならば$f(x) > g(x)$ であることを示せ。

(3) $C$ と$D$ の共有点がちょうど3個であるような$a$ の値を求めよ。